7º ANO

FRENTE B

MATEMÁTICA

Teorema de Pitágoras

CAPÍTULO 5

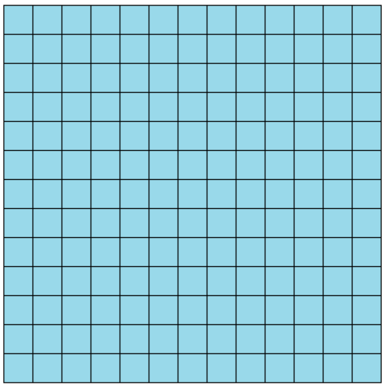
Lista extra de exercícios

1. Um famoso problema de lógica consiste na seguinte situação.
Um viajante precisava pagar sua estadia de uma semana (7 dias) em um hotel, sendo que só possuía uma barra de ouro para pagar.
Para que aceitasse o pagamento em ouro, o dono do hotel fez um desafio ao viajante: "Aceito o pagamento em ouro. Porém, você terá que pagar uma diária de cada vez, e só poderá cortar a barra duas vezes".
Como o viajante deverá cortar a barra para fazer o pagamento? Qual a solução para esse problema?

2. **EEWB 2011** Pitágoras tem doze irmãos que com ele se reuniram na ceia de Natal. Das afirmações a seguir, referentes aos membros da mesma família reunidos, a única necessariamente verdadeira é que:
a) pelo menos uma das pessoas reunidas nasceu em janeiro ou fevereiro;
b) pelo menos uma das pessoas reunidas nasceu num dia par;
c) pelo menos duas pessoas são do sexo feminino;
d) pelo menos duas pessoas reunidas fazem aniversário no mesmo mês.

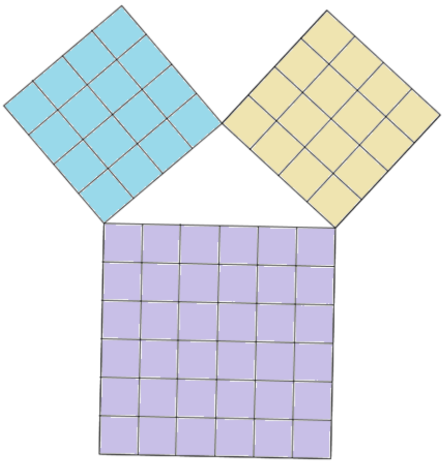
3. Verifique se é possível construir triângulos retângulos tendo como lados segmentos com as medidas iguais às dos números abaixo.
a) 5, 12, 13
b) 8, 11, 14
c) 9, 40, 41
d) 15, 18, 25
e) 12, 35, 37
f) 20, 21, 29

4. Determine dois quadrados cuja soma das áreas seja igual à área do quadrado abaixo.

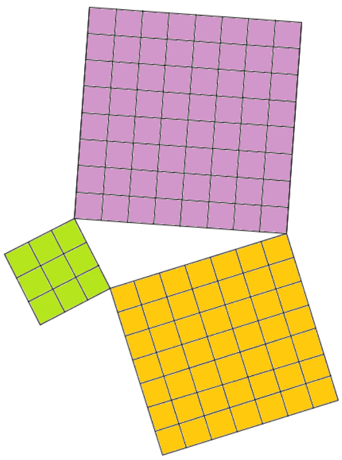


5. Em cada item, responda se o triângulo é retângulo ou não e justifique a sua resposta.

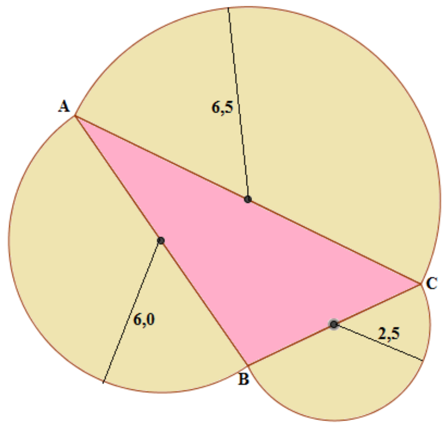
a)



b)

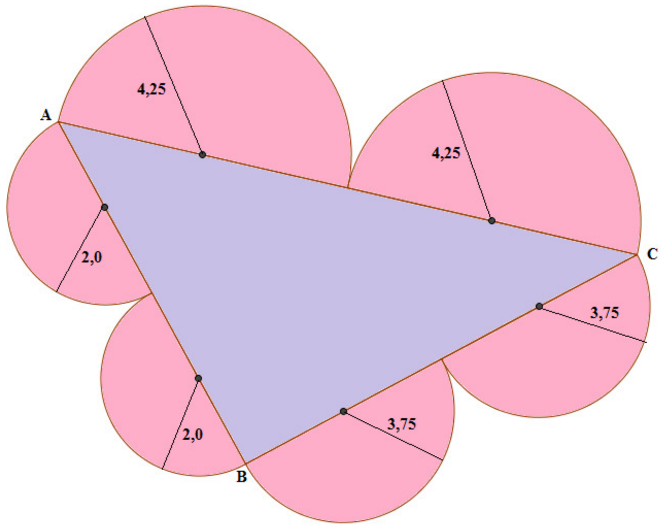


6. Observe a figura abaixo.

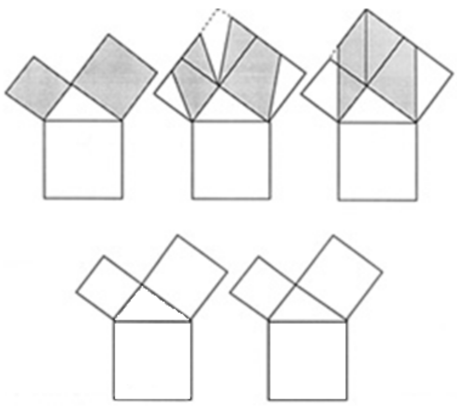


a) Mostre que a área do semicírculo posicionado sobre o maior lado é numericamente igual à soma das áreas dos dois semicírculos posicionados nos lados menores.
b) Sabe-se que um triângulo é retângulo quando seus lados se relacionam de acordo com o Teorema de Pitágoras. É possível afirmar que o triângulo posicionado no centro da figura é retângulo?

7. O triângulo da figura abaixo é retângulo? Justifique a sua resposta.

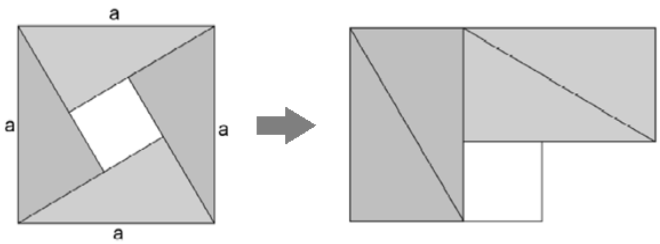


8. Euclides de Alexandria propôs a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras abaixo.



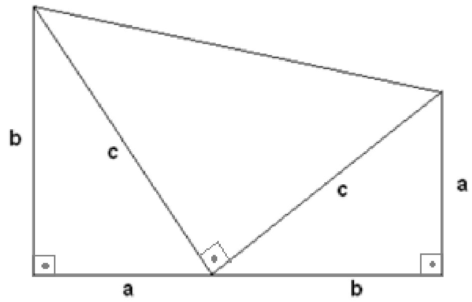
As duas últimas imagens da demonstração estão incompletas. Mostre quais devem ser os próximos passos para completar a demonstração do Teorema.

9. Uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras foi desenvolvida pelo matemático indiano Bhaskara.



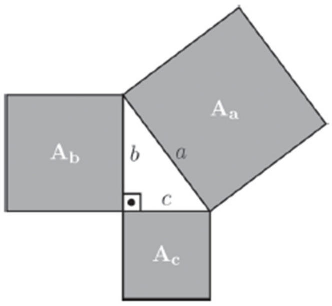
Explique como essa imagem feita por Bhaskara demonstra o Teorema de Pitágoras.

10. Uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras foi proposta pelo ex-presidente dos Estados Unidos, James Abram Garfield através da figura abaixo.



Sabendo que a área total da figura pode ser dada por $\dfrac{(a+b)^2}{2}$, mostre como essa figura demostra o Teorema de Pitágoras.

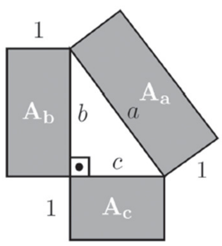
11. Insper 2012 Considere a figura a seguir, na qual foram construídos quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c.



A partir dessa figura, pode-se enunciar o Teorema de Pitágoras:

Se A_a, A_b e A_c são as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, conforme indicado na figura, então vale a igualdade $A_a = A_b + A_c$.

Considere agora que, sobre os lados do mesmo triângulo retângulo, sejam construídos retângulos de altura unitária, conforme a figura.



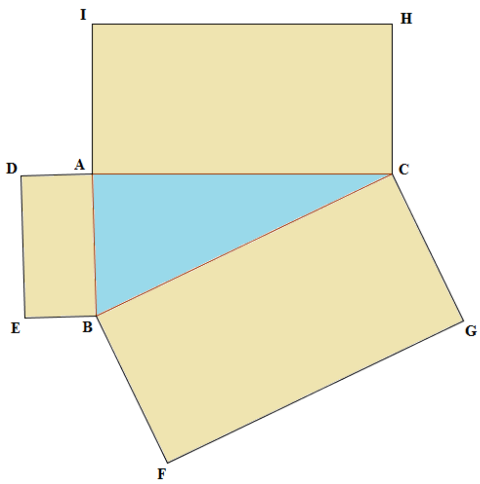
A partir da igualdade expressa no teorema de Pitágoras, assinale a alternativa que completa a sentença a seguir, baseada na nova figura.

Se A_a, A_b e A_c são as áreas dos retângulos de altura unitária construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, conforme indicado na figura, então vale a igualdade:

a) $\frac{A_a}{a} = \frac{A_b}{b} + \frac{A_c}{c}$
b) $aA_a = bA_b + cA_c$
c) $\frac{A_a^2}{a} = \frac{A_b^2}{b} + \frac{A_c^2}{c}$
d) $aA_a^2 = bA_b^2 + cA_c^2$
e) $a^2A_a = b^2A_b + c^2A_c$

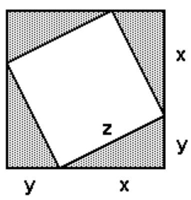
12. Uerj 2005 (Adapt.) Terno pitagórico é a denominação para os três números inteiros que representam as medidas, com a mesma unidade, dos três lados de um triângulo retângulo.
Um terno pitagórico pode ser gerado da seguinte forma.
– Escolhem-se dois números pares consecutivos ou dois números ímpares consecutivos;
– Calcula-se a soma de seus inversos, obtendo-se uma fração cujo numerador e denominador representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo;
– Calcula-se a hipotenusa.
Utilizando o procedimento descrito, calcule as medidas dos três lados de um triângulo retângulo, considerando os números pares 4 e 6.

13. Observe a figura abaixo.



Sabendo que AC = b, AB = c e BC = a e que as alturas dos retângulos medem a metade de suas larguras, mostre que se o triângulo ABC é retângulo, então a área do retângulo BCGF é igual à soma das áreas dos retângulos ACHI e ABED.

14. UFV 2004 Na figura abaixo, o quadrado de lado x + y tem área Q e está decomposto em um quadrado de lado z e quatro triângulos retângulos congruentes de catetos x e y. Seja q a área do quadrado menor e seja t a área de cada triângulo.



a) Simplificando a equação Q = q + 4t, demonstre que $z^2 = x^2 + y^2$.
b) A demonstração que você fez no item anterior corresponde à do famoso Teorema de Pitágoras. Complete o enunciado deste teorema: "Em um triângulo retângulo, ...

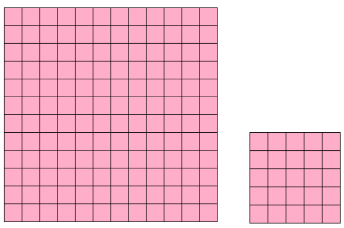
GABARITO / RESOLUÇÃO

1. Ele deve cortar a barra uma vez, sendo que o primeiro pedaço deverá ter 1/7 do total da barra. Em seguida, deve cortar pela segunda e última vez, tendo cada parte, respectivamente, 2/7 e 4/7 do total da barra.
Então, o pagamento deve ser feito da seguinte forma:
1ª diária: paga com 1/7 da barra.
2ª diária: paga com 2/7 da barra e recebe o 1/7 da barra de volta.
3ª diária: paga novamente com 1/7 da barra.
4ª diária: paga com 4/7 da barra e recebe de volta 3/7 da barra (em dois pedaços: 1/7 e 2/7 da barra).
5ª diária: paga com 1/7 da barra novamente.
6ª diária: paga com 2/7 da barra e recebe 1/7 da barra de volta.
7ª diária: paga com 1/7 da barra.

2. D
Como existem 12 meses no ano e imaginando que doze das pessoas fazem aniversário em meses diferentes, concluímos que pelo menos duas das treze pessoas fazem aniversário no mesmo mês.

3.
a) Sim, pois $13^2 = 12^2 + 5^2$.
b) Não, pois $14^2 \neq 11^2 + 8^2$.
c) Sim, pois $41^2 = 40^2 + 9^2$.
d) Não, pois $25^2 \neq 18^2 + 15^2$.
e) Sim, pois $37^2 = 35^2 + 12^2$.
f) Sim, pois $29^2 = 21^2 + 20^2$.

4.



5.
a) Não é retângulo, pois $6^2 \neq 4^2 + 4^2$.
b) Não é retângulo, pois $8^2 \neq 7^2 + 3^2$.

6.

a) Área do semicírculo posicionado no lado AC: $\dfrac{\pi \cdot (6{,}5)^2}{2}$.

Área do semicírculo posicionado no lado AB: $\dfrac{\pi \cdot (6{,}0)^2}{2}$.

Área do semicírculo posicionado no lado BC: $\dfrac{\pi \cdot (2{,}5)^2}{2}$.

O maior lado é o lado AC, assim:

$$\frac{\pi \cdot (6{,}5)^2}{2} = \frac{\pi \cdot (6{,}0)^2}{2} + \frac{\pi \cdot (2{,}5)^2}{2}$$

$$\pi \cdot (6{,}5)^2 = \pi \cdot (6{,}0)^2 + \pi \cdot (2{,}5)^2$$

$$(6{,}5)^2 = (6{,}0)^2 + (2{,}5)^2$$

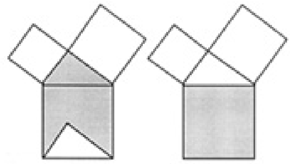
$$42{,}25 = 36 + 6{,}25$$

$$42{,}25 = 42{,}25$$

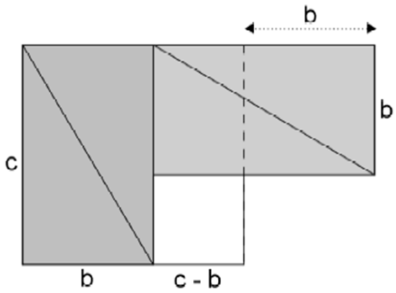
b) Os lados do triângulo são os diâmetros dos semicírculos, ou seja: 13, 12 e 5. Como $13^2 = 12^2 + 5^2$, temos que o triângulo é retângulo.

7. Note que os lados do triângulo podem ser obtidos dos raios dos semicírculos posicionados sobre eles.
Lado AC: $4 \cdot 4{,}25 = 17$
Lado AB: $4 \cdot 2{,}0 = 8$
Lado BC: $4 \cdot 3{,}75 = 15$
Como $17^2 = 15^2 + 8^2$, temos que o triângulo é retângulo.

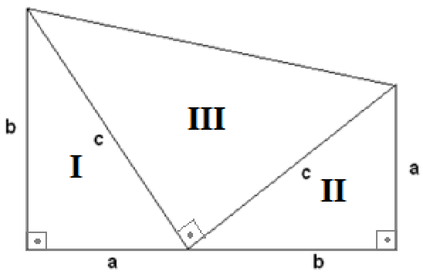
8.



9. A imagem proposta por Bhaskara constrói na figura da direita dois quadrados, um de lado b, o menor cateto do triângulo, e outro de lado c, o maior cateto do triângulo.



10. Perceba que os três triângulos desenhados são retângulos; assim, podemos calcular suas áreas.



Área I: $\dfrac{a \cdot b}{2}$

Área II: $\dfrac{a \cdot b}{2}$

Área III: $\dfrac{c \cdot c}{2}$

Note que ao somar essas três áreas, teremos a área total da figura:

Área I + Área II + Área III = $\dfrac{a \cdot b}{2} + \dfrac{a \cdot b}{2} + \dfrac{c \cdot c}{2}$

De acordo com o enunciado, a área total da figura corresponde a $\dfrac{(a \cdot b)^2}{2}$. Assim:

$$\frac{(a \cdot b)^2}{2} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + ab = ab + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

11. B

$A_a = a \cdot 1 = a$

$A_b = b \cdot 1 = b$

$A_c = c \cdot 1 = c$

$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a \cdot a = b \cdot b + c \cdot c \Leftrightarrow aA_a = bA_b + cA_c$

12. Sejam a, b e c, respectivamente, a hipotenusa e os catetos do triângulo procurado. De acordo com o enunciado, temos:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

De onde: b = 5 e c = 12.

Logo $a = \sqrt{25 + 144} = 13$

13. Como as alturas dos retângulos medem a metade de suas larguras, temos:

$AI = \frac{b}{2}, EB = \frac{c}{2}$ e $CG = \frac{a}{2}$

Assim, a área de BCGF é: $A_{BCGF} = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$

As áreas de ACHI e ABED são:

$A_{ACHI} = b \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2}$

$A_{ABED} = c \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{2}$

Se ABC é retângulo, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

Dividindo os dois lados por 2:

$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2}$

$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$

Assim:

$A_{BCGF} = A_{ACHI} + A_{ABED}$

14.

a) Temos:

$Q = (x + y)^2$

$q = z^2$

$t = \frac{xy}{2}$

Logo, se Q = q + 4t, vem:

$(x + y)^2 = z^2 + \frac{4xy}{2} \Leftrightarrow$

$x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2xy$

De onde se obtém:

$z^2 = x^2 + y^2$

b) o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.